Eingesendete Abhandlungen.

Über das Problem der vier Punkte bei Anwendung des Messtisches.

Von Dr. Anton Winckler,
Professor der praktischen Geometrie und des Situations-Zeichnens an der k. k. technischen Lehranstalt in Brünn.

(Mit I Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Jänner 1855.)

1.

Die praktische Wichtigkeit der Aufgabe, aus der bekannten Lage dreier Punkte auf dem Felde die Lage eines vierten Punktes blos durch Messung der Winkel, welche die von ihm nach den gegebenen Punkten gehenden Visirlinien mit einander bilden, zu bestimmen, hat, wie bekannt, eine grosse Anzahl von Abhandlungen und verschiedene Lösungen hervorgerufen.

Diese Lösungen, die zum Theile von den ausgezeichnetsten Geometern herrühren, unterscheiden sich natürlich darin, ob der Theodolit oder der Messtisch zur Anwendung kommt.

Bei Anwendung des Theodoliten geschieht die Lösung, wie sich von selbst versteht, nur durch Rechnung, und in dieser Hinsicht ist die Sache als erledigt zu betrachten.

Nicht in gleichem Masse ist dies bei den bis jetzt bekannten Auflösungen der Fall, welche sich auf den Gebrauch des Messtisches beziehen, wo begreiflich nur die graphische Methode anwendbar ist. Denn hier stellt der Praktiker mit Recht die Anforderung, dass die Auflösung (das Rückwärtseinschneiden genannt) in allen Fällen, welche überhaupt eine solche zulassen, leicht (ohne weitläufige Sätze und Regeln beachten zu müssen), bequem (ohne geometrische Constructionen mit Cirkel und Lineal und ohne grössere Drehungen des Messtischblattes), sowie schnell und sicher auf dem Felde ausgeführt werden könne.

In der That entsprechen die bisher üblichen Verfahrungsarten diesen Anforderungen nicht vollständig, und es scheint zur näheren Begründung angemessen, die wichtigsten jener Methoden mit Rücksicht auf die angeführten Gesichtspunkte in Kürze zu betrachten.

Bekanntlich kommen praktisch nur noch die Methode der directen Bestimmung des vierten Punktes oder Standortes von Bessel und Bohnenberger, durch welche ein zweiter Punkt (Hilfspunkt) der Orientirungslinie nach einem der drei gegebenen Punkte construirt wird, sodann die beiden Näherungsmethoden von Lehmann und Netto zur Anwendung.

Das erstere, directe Verfahren leidet, so einfach es sonst zu sein scheint, wie dies in jedem guten Lehrbuche auseinander gesetzt wird, an dem Übelstande, dass unter Umständen der Hilfspunkt entweder durch einen schlechten Schnitt erhalten wird oder zu nahe an denjenigen der drei Punkte fällt, welcher mit ihm die Orientirungslinie bestimmt, so dass diese unsicher wird, oder endlich, dass der Hilfspunkt ausserhalb des Tischblattes fällt. Kann man sich in diesen Fällen auch auf andere Weise helfen, so entstehen daraus doch Umständlichkeiten. Eine wesentliche Verzögerung der Arbeit entsteht aber immer dadurch, dass grössere Drehungen des Tischblattes und in deren Folge wiederholte Einstellungen desselben nothwendig werden.

Diese Rücksichten waren es wohl, welche zur Aufsuchung einer anderen, approximativen Lösung Veranlassung gaben, bei welcher eine Drehung des Tischblattes von Hause aus ganz umgangen und wobei, wenn die Orientirung nach Schätzung einigermassen gelungen ist, nur noch sanfte Mikrometerbewegungen erforderlich werden, welche eine weitere Berücksichtigung der Libelle nicht mehr nöthig machen. Nachdem nämlich zwei kleine, sogenannte Fehlerdreiecke erhalten worden sind, welche in Bezug auf die „mittlere" Visirlinie eine entgegengesetzte Lage haben, kann man, wie bekanntlich Lehmann gezeigt hat, durch Schätzung einen Punkt finden, bei welchem die auf die beiden äusseren Visirlinien gefällten Perpendikel sich nahezu wie diese Linien verhalten, und welcher dann ebenfalls nahezu ein Punkt der mittleren Visirlinie ist, nach der man nun den Tisch orientiren kann. Dieser Orientirung wird aber meistens wieder ein Fehlerdreieck entsprechen, und ohne einige Wiederholungen des Verfahrens wird man wohl selten ganz scharf zum Ziele gelangen. So sicher man nun dieses auch erreichen wird, so beschwerlich wird es demjenigen Geometer sein, der in jener Schätzung nicht bald das Rechte trifft, oder dessen Gedächtniss einen der Lehrsätze nicht treu bewahrt hat, welche Lehmann

rücksichtlich der gegenseitigen Lage der mittleren Visirlinie und der Fehlerdreiecke auf empirischem Wege gefunden hat, und welche später von Herrn Professor Hartner in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften allgemein bewiesen worden sind.

Diese Rücksichten hinwieder mögen es gewesen sein, welche Netto zur Ermittelung eines mehr directen, von blossen Schätzungen unabhängigen Verfahrens führten, vermöge welchen aus blos zwei Fehlerdreiecken ein zweiter Punkt der mittleren Visirlinie durch Construction erhalten werden kann. Dieses Verfahren, im weiteren als bekannt vorausgesetzt, erfordert, wenigstens behufs einer schärferen Bestimmung jenes Punktes, ebenfalls die Kenntniss der Lehmann'schen Sätze, bedingt das Operiren mit sehr kleinen Linienstücken vermittelst des Cirkels und liefert den gesuchten Punkt durch einen einzigen, nicht selten sehr schiefen Schnitt. Es ist also auch hierbei nicht jede Hilfsconstruction mit Cirkel und Lineal vermieden, und wird man wohl öfter, ohne Wiederholung des Verfahrens, eine scharfe Orientirung des Tisches nicht erlangen können.

2.

Das Verfahren nun, welches wir dem Praktiker als in allen Fällen leicht, bequem und sicher zum Ziele führend empfehlen möchten, und welches weder die Kenntniss der Lehmann'schen Sätze, noch anderer Constructionsregeln voraussetzt, auch den Gebrauch des Cirkels nicht nothwendig macht, sondern auf rein mechanische Weise die Lage des Standortes auf dem Messtischblatte mit aller erforderlichen Schärfe liefert, nachdem nur etwa drei grössere oder kleinere Fehlerdreiecke erzeugt worden sind, — ein solches Verfahren, welches also allen Eingangs gestellten Anforderungen entspricht, liegt viel näher als alle vorhin aufgeführten Regeln und beruht auf der folgenden überaus einfachen Bemerkung. Denkt man sich nämlich das Messtischblatt continuirlich gedreht und in jeder Lage desselben durch zwei der gegebenen Punkte und die entsprechenden auf dem Felde Visirlinien gezogen und ihre Durchschnittspunkte auf dem Blatte bemerkt, so werden diese Punkte in ihrer Gesammtheit eine krumme Linie — Scheitelcurve — bilden, welche, wie schon aus elementaren Gründen klar ist, und wie wir zum Überflusse noch näher zeigen werden, einem Kreise sehr nahe kommt, und in welcher derjenige Punkt liegt, durch welchen die

Visirlinien gehen müssen, wenn die beiden gegebenen Punkte auf dem Tischblatte in einer zur entsprechenden auf dem Felde parallelen Linie liegen. Da aber drei Punkte auf dem Blatte gegeben sind, so kann man je zwei derselben auf dreierlei Arten mit einander verbinden und erhält also auf beschriebene Weise drei verschiedene Curven, wovon jede den gesuchten Punkt — Standort — enthalten muss. Dieser kann also nur im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte aller drei Curven liegen und ist durch den letzteren vollständig bestimmt.

Die praktische Ausführung des hierdurch angedeuteten Verfahrens lässt sich nun einfach wie folgt bezeichnen.

Man orientire den Tisch von Auge aus so genau als möglich, und ziehe nach den drei gegebenen Punkten die Visirlinien, welche im Allgemeinen ein Fehlerdreieck liefern werden. Man drehe hierauf das Tischblatt vermittelst der Mikrometerschraube einmal nach der rechten und einmal nach der linken Seite um soviel, dass die beiden neuen, auf gleiche Weise entstehenden Fehlerdreiecke zu entgegengesetzten Seiten des erstern liegen und etwa grösser als dieses sind. Bezeichnet man dabei, um Irrungen vorzubeugen, die drei gegebenen Punkte auf dem Tische mit a, b, c, und die Durchschnittspunkte der Visirlinien nach a und b, nach a und c, nach b und c beziehungsweise beim ersten Fehlerdreiecke mit γ, β, α, beim zweiten mit γ', β', α', und beim dritten mit $\gamma'', \beta'', \alpha''$, so sind nun $\alpha, \alpha', \alpha''$ und β, β', β'' und $\gamma, \gamma', \gamma''$ jedesmal drei Punkte der oben bezeichneten Curven. Diese Curven lassen sich, soweit wir ihrer bedürfen, mit um so grösserer Sicherheit durch einen blossen Freihandzug construiren, als die Punkte, durch welche sie gehen müssen, fast immer sehr nahe an einander liegen, die Curven selbst aber äusserst nahe eine constante Krümmung haben, nämlich Kreisbogen sind, ausserdem durch die Punkte a, b; a, c; b, c gehen und sich in einem gemeinschaftlichen Punkte schneiden müssen, so dass bei einiger Übung und Sorgfalt rücksichtlich ihrer Construction jede Willkürlichkeit sich von selbst ausschliesst. In welch' hohem Grade dies der Fall ist, habe ich mich vielfältig und unter den verschiedensten Umständen praktisch überzeugt, und einige wenige Versuche werden für jeden Geometer hinreichen, um alle Zweifel in die vollkommene Zuverlässigkeit und ungemeine Förderlichkeit des Verfahrens zu beseitigen.

Sollte sich indessen zeigen, dass, nachdem bereits drei Fehlerdreiecke erhalten und die einander entsprechenden Eckpunkte derselben durch Bogen verbunden worden sind, diese Bogen sich erst in ihrer Verlängerung schneiden, dass also die anfängliche Orientirung noch sehr unrichtig war, so erhält man eben hierdurch den sichersten Fingerzeig, nach welcher Richtung das Messtischblatt weiter zu drehen sei, um ein viertes Fehlerdreieck zu erhalten, welches nun ganz gewiss über dem gesuchten Punkte hinaus liegt. Da nun die drei Curvenbogen mit Sicherheit bis zu den respectiven Eckpunkten dieses neuen Fehlerdreieckes fortgesetzt werden können, und der Durchschnittspunkt in ihnen selbst und nicht mehr in ihren Verlängerungen liegt, so ergibt er sich mit derselben Bestimmtheit wie in dem oben zuerst angenommenen Falle.

Übrigens braucht kaum bemerkt zu werden, dass, da die Bildung der Fehlerdreiecke sehr leicht und schnell von Statten geht und da, je grösser die Zahl derselben ist, um so bequemer die Curven gezogen werden, es der Bequemlichkeit des ganzen Verfahrens keinen Eintrag thut, wenn man überhaupt statt drei etwa vier oder fünf Fehlerdreiecke nach einander bildet, die an der Stelle, wohin der gesuchte Punkt fallen wird, in kleineren Zwischenräumen auf einander folgen.

Nach dem bisher Ausgeführten ist ferner klar, dass das obige Verfahren unmittelbarer und schneller als jedes andere den bekannten Ausnahmefall, in welchem das Problem keine oder nur eine sehr unsichere Auflösung zulässt, anzeigt, den Fall nämlich, in welchem der Standort mit den drei gegebenen Punkten nahezu oder ganz genau in einem Kreise liegt. Auf das Stattfinden dieses Falles wird man nämlich sogleich schliessen, wenn die drei Curven sehr nahe zusammenfallen und demgemäss ihr Durchschnittspunkt unsicher wird, und dies zeigt sich schon auf das Bestimmteste, nachdem drei Fehlerdreiecke gebildet und ihre entsprechenden Eckpunkte durch Curvenbogen verbunden worden sind. Bei jeder anderen Lage des Standortes, und insbesondere dann, wenn die Entfernungen desselben von den drei Punkten unter sich sehr ungleich sind, werden sich immer wenigstens zwei dieser Bogen unter so grossen Winkeln durchsetzen, dass ihr Schnittpunkt mit der nöthigen Schärfe erscheint.

Diese umständlichere Darlegung des Verfahrens schien durch den Umstand geboten, dass dasselbe, so nahe es liegt und so weniger theoretischer Auseinandersetzungen es erfordert, in keinem der mir

bekannten Werke, welche diesen Gegenstand behandeln, erwähnt wird. In einigen Lehrbüchern über praktische Geometrie, z. B. jenem von Herrn Prof. Grunert, wird (S. 230) nach Bohnenberger zwar bemerkt, dass man den Standort näherungsweise dadurch auf dem Tischblatte bestimmen könne, dass man die sich correspondirenden Eckpunkte zweier Fehlerdreiecke durch gerade Linien verbinde und ihren Durchschnittspunkt bestimme. Aber abgesehen davon, dass sich auch bei nahe an einander liegenden Fehlerdreiecken die meistens ziemlich stark gekrümmten Curvenbogen mit einiger Genauigkeit zwar der Grösse aber nicht der Richtung nach durch ihre Sehnen ersetzen lassen, ist eine schnelle und sichere Bestimmung des Standortes auf diese Weise schon darum unmöglich, weil sich die drei Sehnen, die man ziehen kann, wohl niemals in einem Punkte treffen werden, und man also statt des richtigen, drei ungenaue Punkte für den Standort erhält.

3.

Die oben mitgetheilte, auch dem weniger unterrichteten Praktiker zugängliche Auflösung erledigt, wie wir glauben, die immer noch häufig zu vernehmenden Einwürfe gegen die öftere Anwendbarkeit dieses nützlichen Problems. In der That wird man sich desselben nicht nur in dem Falle, wo drei Punkte auf dem Blatte gegeben sind, wovon keiner sich zur Aufstellung des Instrumentes eignet, sondern auch in mehreren anderen Fällen mit Nutzen bedienen, die wir nun in Kürze anführen werden.

A. Wenn in einem der drei Punkte eine Aufstellung zwar möglich, aber für die Detailaufnahme nicht weiter von Nutzen wäre, und nur den Zweck haben würde eine Orientirungslinie nach einem neuen Standorte hin zu liefern, so wird man es vorziehen, sich unmittelbar auf diesem Standorte aufzustellen und denselben, wie oben aus einander gesetzt, aus den gegebenen Punkten durch Rückwärtseinschneiden zu bestimmen. Man gewinnt dadurch nicht nur an Zeit, sondern hat vermöge der gleichzeitigen Benützung aller drei Punkte zugleich eine im Verfahren selbst liegende Controle und die Sicherheit, den richtigen Punkt erhalten zu haben, welche um so mehr in Anschlag zu bringen ist, als etwaige Orientirungsfehler, welche bei jener Hilfsaufstellung eintreten könnten, hierbei ganz vermieden werden.

B. Eine weitere nicht minder bemerkenswerthe Anwendung lässt das Problem vermöge seiner leichtern Auflösung in dem Falle zu, wenn man zwar eine Orientirungslinie nach dem neuen Standorte hin bereits besitzt, der durch Seitwärtsabschneiden nach einem zweiten Fixpunkte erhaltene Schnitt aber nicht ganz günstig ist, oder die Controle nach einem dritten Punkte nicht aushält, sondern ein Fehlerdreieck gibt, so dass man genöthigt wäre durch eine neue Aufstellung des Messtisches eine günstigere Orientirungslinie von einem andern Fixpunkte aus zu erheben oder die bereits gegebene zu verbessern, wodurch in beiden Fällen die Arbeit verzögert würde. Statt dessen wird man den einmal eingenommenen Standpunkt beibehalten, vermittelst der gegebenen Orientirungslinie den Tisch einstellen und nun den Standort mit Schärfe durch Rückwärtseinschneiden bestimmen. Die Zweckmässigkeit dieses Verfahrens bedarf für den praktischen Geometer keiner weitern Auseinandersetzung, denn es ist klar, dass es in allen Fällen das bequemste und sicherste Mittel darbietet, um die durch mehrere auf einander folgende mittelbare Orientirungen des Tisches eintretenden Fehler zu beseitigen und den jeweiligen Standort den Fixpunkten möglichst genau anzuschliessen.

Von den mannigfachen Anwendungen, deren die beschriebene rein mechanische und von allen geometrischen Lehrsätzen unabhängige Methode zur Lösung schwierig scheinender Aufgaben fähig ist, und welchen der Leser manche selbst beifügen wird, mögen nur noch die folgenden zwei Erwähnung finden.

C. Die Lage zweier Punkte und die Entfernung eines derselben vom Standorte ist gegeben; es soll der Tisch orientirt, respective der Standort bestimmt werden. Man beschreibe mit jener gegebenen Entfernung aus ihrem ebenfalls gegebenen Endpunkte einen Kreisbogen und bilde, nachdem der Messtisch von Auge aus möglichst genau orientirt ist, mit Hilfe von drei oder mehreren Durchschnitten der nach den beiden Punkten auf dem Blatte und auf dem Felde gezogenen Visirlinien einen jenen Kreis durchsetzenden Bogen der in Art. 2 erwähnten Scheitelcurve, so wird man, wie nicht näher gezeigt zu werden braucht, den Standort aus einer einzigen Aufstellung des Tisches erhalten. Obgleich diese Aufgabe gewiss nur selten vorkommen wird, so schien sie doch darum erwähnenswerth, weil wohl jede andere Auflösungsart zwei Aufstellungen des Messtisches erfordern würde.

D. Eine ähnliche Behandlung ergibt sich für die folgende Aufgabe. Die Lage dreier Punkte ist gegeben, wovon aber keiner von dem anderen aus sichtbar ist. Man besitzt ferner die Orientirungslinie von einem dieser Punkte nach einem vierten, — dem Standorte des Messtisches, kann aber von diesem aus nicht zurückorientiren, weil sich nach dem entsprechenden Punkte des Terrains nicht visiren lässt; nach den beiden anderen gegebenen Punkten dagegen ist die Visirrichtung frei. Es soll nun der Messtisch orientirt, beziehungsweise der Standort auf dem Blatte bestimmt werden.

Man orientire den Tisch von Auge aus möglichst genau, bilde auf angegebene Weise mittelst der beiden sichtbaren Punkte die Scheitelcurve der Visirlinien und bestimme mit Schärfe den Punkt, in welchem sie die gegebene Orientirungslinie durchschneidet, so ist dieser der Standort auf dem Blatte. Eine Hilfsaufstellung ist auch hier nicht erforderlich, und es löst sich also diese Aufgabe, welche, wie die vorhergehende, meines Wissens noch nicht erörtert worden ist, auf ganz einfache Art.

Diese Aufgabe kann z. B. in gebirgigen Gegenden bei graphischen Triangulationen in Fällen vorkommen, wenn der gegebene Punkt, von welchem aus nach dem neuen Standorte rayonnirt werden kann, viel tiefer als dieser liegt, so dass man den letzteren vom ersteren, aber nicht umgekehrt diesen von jenem uns anvisiren kann.

4.

Von rein theoretischem Gesichtspunkte betrachtet, scheint es angemessen zu sein, hier noch einige Eigenschaften der oben zur Sprache gebrachten krummen Linien näher zu untersuchen, welche der Durchschnittspunkt der Visirlinien beschreibt, wenn dieselben bei fortgesetzter Drehung des Messtischblattes um seine Verticalaxe jedesmal durch die sich entsprechenden Punkte auf dem Felde gezogen werden.

Zur Gleichung dieser Curve scheint man am kürzesten auf dem folgenden Wege zu gelangen.

Es seien (Fig. 1) A, A_1 die beiden Punkte auf dem Felde, O, O_1 die entsprechenden auf dem Messtische, und P der Durchschnittspunkt der beiden darauf gezogenen Visirlinien.

Ferner sei C die Drehaxe des Tischblattes.

In dem Dreiecke ACA_1 können alle Seiten und Winkel als bekannt angenommen werden, und zwar sei:

$$a = AC, \quad a_1 = A_1 C,$$

α, α_1 seien die Winkel bei A und A_1,
$\gamma = \alpha_1 - \alpha$ der Winkel bei C. Die Lage der Linie $O\,O_1$ ist bestimmt durch die Grössen

$$r = OC, \quad \varpi = COO_1, \quad \delta = OO_1.$$

Die Linie $O\,O_1$ bilde mit AA_1 den Winkel θ und werde als Abscissenaxe, O als Anfangspunkt angenommen. Es seien ferner:
X, Y und X_1, Y_1 die Coordinaten der Punkte A, A_1;
x, y die Coordinaten des Punktes P der in Frage stehenden Curve;
ρ und φ seien die Polar-Coordinaten dieses Punktes, O als Pol und OO_1 als Anfangsrichtung betrachtet.

Unmittelbar aus der Figur ergeben sich nun für die Curve die folgenden zwei Bestimmungs-Gleichungen

$$\begin{aligned} xY &= yX \\ (x-\delta)\,Y_1 &= y\,(X_1-\delta) \end{aligned} \qquad (1)$$

wobei

$$\begin{aligned} X &= r\cos\varpi + a\cos(\alpha-\theta) \\ Y &= r\sin\varpi + a\sin(\alpha-\theta) \\ X_1 &= r\cos\varpi + a_1\cos(\alpha_1-\theta) \\ Y_1 &= r\sin\varpi + a_1\sin(\alpha_1-\theta). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} x\{r\sin\varpi + a\ \sin(\alpha-\theta)\} &= y\{r\cos\varpi + a\cos(\alpha-\theta)\} \\ (x-\delta)\{r\sin\varpi + a_1\sin(\alpha_1-\theta)\} &= y\{r\cos\varpi + a_1\cos(\alpha_1-\theta) - \delta\}, \end{aligned} \qquad (2)$$

woraus noch θ zu eliminiren ist, um die gesuchte Gleichung zwischen x und y zu erhalten. Zu diesem Zwecke verwandle man in der ersten Gleichung $\alpha - \theta$ in $-\gamma + (\alpha_1 - \theta)$ und entwickle die betreffenden Functionen, nehme auch mit der zweiten Gleichung eine kleine Umformung vor, so dass man erhält:

$$\begin{aligned} & a\ (x\sin\gamma + y\cos\gamma)\cos(\alpha_1-\theta) \\ & - a\ (x\cos\gamma - y\sin\gamma)\sin(\alpha_1-\theta) = r\,(x\sin\varpi - y\cos\varpi), \\ & a_1\,y\cos(\alpha_1-\theta) - a\,(x-\delta)\sin(\alpha_1-\theta) = (x-\delta)\,r\sin\varpi \\ & \qquad + y\,(\delta - r\cos\varpi). \end{aligned}$$

Wenn nun allgemein zwei Gleichungen von der Form

$$A \cos\psi + B \sin\psi = C$$
$$A_1 \cos\psi + B_1 \sin\psi = C_1$$

gegeben sind und wenn die sechs Coëfficienten von ψ nicht abhängen, so muss, wie man sich sogleich überzeugen wird, die Gleichung

$$(AC_1 - A_1C)^2 + (BC_1 - B_1C)^2 = (AB_1 - A_1B)^2$$

oder, was dasselbe ist

$$(3) \quad (A^2 + B^2)\,C_1^2 + (A_1^2 + B_1^2)\,C^2 - 2(AA_1 + BB_1)\,CC_1 = (AB_1 - A_1B)^2$$

stattfinden. — Setzt man nun die dem vorliegenden Falle entsprechenden Werthe der Coëfficienten in die Gleichungen (3) ein, so ergibt sich, nach einigen Verwandlungen, für die Curve die folgende Gleichung vierten Grades:

$$(4) \quad \begin{aligned} &+ a^2(x^2+y^2)\,\{(x-\delta)\,r \sin\varpi + y\,(\delta - r\cos\varpi)\}^2 \\ &+ a_1^2\,r^2\,((x-\delta)^2 + y^2)\,(x \sin\varpi - y\cos\varpi)^2 \\ &- 2aa_1 r\,\{(x^2+y^2)\cos\gamma - \delta\,(x\cos\gamma - y\sin\gamma)\} \\ &\times \{(x-\delta)\,r\sin\varpi + y(\delta - r\cos\varpi)\}\,(x\sin\varpi - y\cos\varpi) \\ &= a^2 a_1^2\,\{(x^2+y^2)\sin\gamma - \delta\,(x\sin\gamma + y\cos\gamma)\}^2. \end{aligned}$$

Durch Einführung der Polar-Coordinaten vereinfacht sich diese Gleichung in soferne, als man dann wenigstens den Radiusvector aus einer quadratischen Gleichung finden kann.

Setzt man nämlich

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

so findet sich alsbald

$$\begin{aligned} &+ a^2\{\rho\,(r\sin(\varpi - \varphi) + \delta\sin\varphi) - \delta r\sin\varpi\}^2 \\ &+ a_1^2 r^2(\rho^2 - 2\rho\,\delta\cos\varphi + \delta^2)\sin^2(\varpi - \varphi) \\ &- 2aa_1 r\,\{\rho\,(r\sin(\varpi - \varphi) + \delta\sin\varphi) - \delta r\sin\varpi\} \\ &\times (\rho\cos\gamma - \delta\cos(\gamma + \varphi))\sin(\varpi - \varphi) \\ &= a^2 a_1^2(\rho\sin\gamma - \delta\sin(\gamma + \varphi))^2. \end{aligned}$$

Wollte man die Curve einer vollständigen Discussion unterziehen, so würden jedoch die Gleichungen (1) und (2) bequemer sein, als die eben angeführten Endgleichungen.

Wir führen von den bemerkenswerthen Eigenschaften der krummen Linie die folgenden an.

A. Wenn die Entfernungen a, a_1 der Punkte A, A_1 von dem festen Drehpunkte C ohne Ende wachsen, während ihr Winkel γ derselbe bleibt, so wird die Curve von der Lage der Linie δ gegen den Punkt C, also von r und ϖ unabhängig und nähert sich dieselbe mehr und mehr einem festen Kreise, in welchem δ eine dem Peripheriewinkel γ entsprechende Sehne ist. Dieser Satz, welcher, wie schon in Art. 2 bemerkt wurde, unmittelbar aus elementaren Gründen einleuchtet, ergibt sich auch ohne weiteres aus der Gleichung (4). In der That, dividirt man diese Gleichung durchgehends durch $a^2\, a_1{}^2$ und setzt dann a und a_1 unendlich gross, so erhält man

$$x^2 + y^2 = \delta\,(x + y\ cotg.\ \gamma),$$

welches die dem bezeichneten Kreise zugehörige Gleichung ist.

B. Die Zweige der (geschlossenen) Curve bieten unter sich d r e i Durchschnitts- oder sogenannte Doppelpunkte dar.

Die Nachweisung dieses Satzes aus der Gleichung (4) und nach den gewöhnlichen Regeln würde zu sehr umständlichen Rechnungen führen. Geht man aber von den Gleichungen (1) und (2) aus, so werden die Weitläufigkeiten und insbesondere die Behandlung einer Gleichung vierten Grades vermieden, und kommen nur solche e r s t e n Grades zur Auflösung.

Man fasse zu dem Ende die Frage nach mehrfachen Punkten in der Weise auf, dass man untersucht, ob es zwei verschiedene Werthe von θ gebe, für welche sowohl x als y dieselben Werthe behalten. Denn gibt es zwei solcher Werthe, so entsprechen diese nothwendig einem Durchschnittspunkte der Curvenzweige unter sich.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, wollen wir nun mit θ_0 und θ jene zwei Werthe bezeichnen, dann entstehen zu (2) zwei analoge Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x\,\{r\ sin\,\varpi + a\ sin\,(\alpha - \theta_0)\} &= y\,\{r\ cos\,\varpi + a\ cos\,(\alpha - \theta_0)\} \\ (x-\delta)\,\{r\ sin\,\varpi + a_1 sin\,(\alpha_1 - \theta_0)\} &= y\,\{r\ cos\,\varpi + a_1 cos\,(\alpha_1 - \theta_0) - \delta\} \end{aligned}\right\} \quad (2^0)$$

in welchen nun x und y genau dieselben Werthe wie in (2) haben sollen. Eliminirt man nun die Grössen x, $x - \delta$ und y unter der Voraussetzung, dass keine derselben Null sei, aus den Gleichungen (2) und (2^0), so ergibt sich zunächst:

$$\frac{r\ sin\,\varpi + a\ sin\,(\alpha - \theta\ )}{r\ sin\,\varpi + a\ sin\,(\alpha - \theta_0)} = \frac{r\ cos\,\varpi + a\ cos\,(\alpha - \theta\ )}{r\ cos\,\varpi + a\ cos\,(\alpha - \theta_0)}$$

$$\frac{r\ sin\,\varpi + a_1\, sin\,(\alpha_1 - \theta\ )}{r\ sin\,\varpi + a_1\, sin\,(\alpha_1 - \theta_0)} = \frac{r\ cos\,\varpi + a_1\, cos\,(\alpha_1 - \theta\ ) - \delta}{r\ cos\,\varpi + a_1\, cos\,(\alpha_1 - \theta_0) - \delta},$$

Daraus erhält man durch Beseitigung der Nenner und durch Zusammenziehen der einzelnen Glieder alsbald die folgenden Gleichungen:

$$r \sin(\alpha - \varpi - \theta) - r \sin(\alpha - \varpi - \theta_0) = a \sin(\theta - \theta_0),$$
$$r \sin(\alpha_1 - \varpi - \theta) - r \sin(\alpha_1 - \varpi - \theta_0)$$
$$= a_1 \sin(\theta - \theta_0) + \delta(\sin(\alpha_1 - \theta) - \sin(\alpha_1 - \theta_0)),$$

oder, wenn man die Formeln:

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A - B) \cos \tfrac{1}{2}(A + B)$$
$$\sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} C$$

in Anwendung bringt und nach geschehener Verwandlung die beiden Gleichungen durch $2 \sin \frac{\theta - \theta_0}{2}$ dividirt:

$$r \cos\left(\alpha - \varpi - \frac{\theta + \theta_0}{2}\right) + a \cos \frac{\theta - \theta_0}{2} = 0,$$
$$r \cos\left(\alpha_1 - \varpi - \frac{\theta + \theta_0}{2}\right) + a_1 \cos \frac{\theta - \theta_0}{2} = \delta \cos\left(\alpha_1 - \frac{\theta + \theta_0}{2}\right).$$

Eliminirt man hieraus $\cos \frac{\theta - \theta_0}{2}$ und entwickelt dann jeden Cosinus, indem man $\frac{\theta + \theta_0}{2}$ von den übrigen Bogengrössen trennt, so wird man leicht zu der folgenden Gleichung gelangen:

$$\operatorname{tang} \frac{\theta + \theta_0}{2} = - \frac{r \{a \cos(\alpha_1 - \varpi) - a_1 \cos(\alpha - \varpi)\} - a\delta \cos \alpha_1}{r \{a \sin(\alpha_1 - \varpi) - a_1 \sin(\alpha - \varpi)\} - a\delta \sin \alpha_1}.$$

Da ausserdem:

$$\cos \frac{\theta - \theta_0}{2} = - \frac{r}{a} \cos\left(\alpha - \varpi - \frac{\theta + \theta_0}{2}\right),$$

so sind θ und θ_0 vollständig bestimmt. Es ist auch leicht zu sehen, dass man nur ein einziges Paar zusammengehöriger Werthe dieser Grössen erhält. In der That, bezeichnet man durch σ den kleinsten Bogen, welcher aus der ersten Gleichung für $\frac{\theta + \theta_0}{2}$ folgt, und mit τ den kleinsten Bogen, welcher für $\frac{\theta - \theta_0}{2}$ aus der zweiten Gleichung erhalten wird, wenn man darin σ für $\frac{\theta + \theta_0}{2}$ setzt, so findet man als allgemeine Auflösung die Werthe

$$\theta = 2k\pi + \sigma \pm \tau \quad \text{und} \quad \theta_0 = 2k_0\pi + \sigma \mp \tau,$$

wo k und k_0 ganze Zahlen bezeichnen. Es ist also ohne weiteres klar, dass diese Gleichungen nur ein Paar verschiedener Werthe von θ und θ_0 liefern.

Indessen bedarf es zur Bestimmung der Coordinaten x, y dieses Curvendurchschnittes keiner weiteren Berechnung dieser Winkel. Man kann dieselben leicht durch die folgende Bemerkung finden. Zieht man nämlich die Gleichungen (2^0) von jenen (2) der Ordnung nach ab, so ergibt sich nach einigen Verwandlungen:

$$x = y \, tang \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} - \alpha\right)$$

$$x - \delta = y \, tang \left(\frac{\theta + \theta_0}{2} - \alpha_1\right) \tag{5}$$

woraus man nun x und y, ausgedrückt durch $tang \frac{\theta + \theta_0}{2}$, erhält.

Die Entwickelung, aus welcher sich dieser eine besondere Punkt der Curve ergab, gilt nur unter der wohl zu beachtenden Voraussetzung, dass weder x noch $x - \delta$, noch endlich y Null sei; denn wenn eine dieser Grössen Null ist, bleibt die oben vorgenommene Elimination nicht mehr zulässig. Um daher zu untersuchen, ob jenen ausgeschlossenen Fällen nicht ebenfalls Punkte gedachter Art entsprechen, muss man zu den ursprünglichen Gleichungen (1) zurückkehren.

Setzt man darin x und y gleich Null, so muss, wenn diese Hypothese einem doppelten Curvenpunkte entsprechen soll, Y_1 sowohl für θ als θ_0 verschwinden, woraus man die Bedingungen erhält:

$$r \sin \varpi + a_1 \sin (\alpha_1 - \theta) = 0$$

$$r \sin \varpi + a_1 \sin (\alpha_1 - \theta_0) = 0,$$

aus welchen sich θ und θ_0 ergeben. Für den Zusammenhang dieser Werthe erhält man noch die Gleichung

$$\cos \left(\alpha_1 - \frac{\theta + \theta_0}{2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad 2\alpha_1 - (\theta + \theta_0) = \pm \pi.$$

Es findet sonach auch im Anfangspunkte O der Coordinaten ein Durchschneiden der Curvenzweige Statt.

Setzt man ferner in den Gleichungen (1) $x - \delta$ und y gleich Null, so muss, wenn hierfür ein doppelter Punkt stattfinden soll, nothwendig Y für die beiden Winkel θ und θ_0 ebenfalls Null werden, wesshalb die Gleichungen:

$$r \sin \varpi + a \sin (\alpha - \theta) = 0$$

$$r \sin \varpi + a \sin (\alpha - \theta_0) = 0$$

bestehen müssen. Hieraus ergeben sich die Werthe von θ und θ_0, zwischen welchen noch der Zusammenhang, ähnlich wie oben

$$2\alpha - (\theta + \theta_0) = \pm \pi$$

stattfindet. Folglich ist auch der Endpunkt O_1 der Linie δ ein Durchschnittspunkt der Curvenbogen.

Andere Voraussetzungen lassen sich nicht machen, und die Curve bietet daher drei Doppelpunkte dar.

Die beiden zuletzt nachgewiesenen Punkte hätte man sehr leicht aus der Figur direct erkennen können; es schien aber von Interesse zu sein, den analytischen Gang durchgehends beizubehalten, um zu zeigen, dass es in gewissen Fällen der Vorschriften der Differential-Rechnung nicht bedarf, um viel bequemer die „vielfachen Punkte" nachzuweisen und ihre Lage vollständig zu bestimmen.

C. Die drei Durchschnittspunkte der Curvenzweige liegen in dem unter (*A*) bestimmten Kreise, welchem, als Grenze, sich die krumme Linie nähert, wenn a und a_1 ohne Ende wachsen.

Diese Behauptung rechtfertigt sich sehr leicht aus den Gleichungen (5), welche für alle drei Punkte gelten, da bei ihrer Herleitung keine Elimination der Coordinaten stattgefunden hat. In der That erhält man ohne eine solche vorzunehmen aus jenen Gleichungen:

$$tang\,\frac{\theta + \theta_0}{2} = \frac{y\,tang\,\alpha + x}{y - x\,tang\,\alpha} = \frac{y\,tang\,\alpha_1 + (x - \delta)}{y - (x - \delta)\,tang\,\alpha_1},$$

woraus man weiter findet:

$$x^2 + y^2 = \delta(x + y\,cotg\,\gamma),$$

weil $\alpha_1 - \alpha = \gamma$. Dies ist aber genau die unter (*A*) gefundene Kreisgleichung.

Schliesslich die Bemerkung, dass die durch den ausserhalb $O\,O_1$ liegenden Curvendurchschnitt gehenden Geraden OA und $O_1\,A_1$ nothwendig den Winkel γ mit einander bilden und dass daher der durch die Punkte A, A_1, C gelegte Kreis dem oben bemerkten in jenem Durchschnittspunkte begegnen muss.

D. Wenn $O\,O_1$ zu AA_1 parallel ist, so geht die diese Linien halbirende Gerade zugleich durch den Punkt der Curve, in welchem sich die Linien OA und $O_1\,A_1$ schneiden. Dieser Satz lässt sich analytisch leicht nachweisen, ergibt sich aber auch aus einem bekannten Satze der Theorie der Transversalen.

5.

Um den theoretischen Anhang, wozu uns oben die Auflösung des Problems der vier Punkte Veranlassung geboten, in sich zu vervollständigen, wäre nun ausser dem so eben erörterten Falle, wo die Linie $O O_1$ fest bleibt und der Winkel der Visirlinien veränderlich ist, noch derjenige zu betrachten, in welchem das Umgekehrte stattfindet.

Um diesen Fall in Kürze ebenfalls zu betrachten, denke man sich (Fig. 2) drei feste Punkte A, A_1, C, und auf den Schenkeln $A_1 C$ und AC des Winkels bei C zwei Punkte O, O_1 angenommen, deren Entfernung $= \delta$ constant bleibt, sodann von diesen Punkten nach A und A_1 Visirlinien gezogen und die Durchschnittspunkte aller dieser Linien bemerkt, so werden dieselben einer Curve angehören, deren gesetzmässigen Verlauf man am Kürzesten wohl auf die folgende Art ermitteln kann.

Man betrachte die durch C gehende, mit $A A_1$ parallele Gerade als Abscissenaxe und den Punkt C selbst als Anfangspunkt der Coordinaten. Es sei wie früher:

$$a = AC, \quad a_1 = A_1 C$$

α, α_1 die Winkel bei A und A_1

$\gamma = \alpha_1 - \alpha$ der Winkel bei C, und $\delta = O O_1$

θ der Winkel, welchen $O O_1$ mit $A A_1$ bildet. Es seien ferner X, Y und X_1, Y_1 die Coordinaten der Punkte O und O_1, und x, y die Coordinaten des Punktes P der in Frage stehenden Curve.

Man erhält nun unmittelbar aus der Figur die beiden folgenden Bedingungsgleichungen der Curve:

$$\left.\begin{aligned} (X - x)\,(Y - a \;sin\; \alpha) &= (Y - y)\,(X - a \;cos\; \alpha) \\ (X_1 - x)\,(Y_1 - a_1 \;sin\; \alpha_1) &= (Y_1 - y)\,(X_1 - a_1 \;cos\; \alpha_1) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wobei

$$Y = X \;tang\; \alpha_1 \;; \quad X_1 - X = \delta \;cos\; \theta$$
$$Y_1 = X_1 \;tang\; \alpha \;; \quad Y_1 - Y = \delta \;sin\; \theta$$

oder also:

$$X = \frac{\delta \;cos\; \alpha_1}{sin\; \gamma} \;sin\; (\alpha - \theta)\,, \quad Y = \frac{\delta \;sin\; \alpha_1}{sin\; \gamma} \;sin\; (\alpha - \theta)$$

$$X_1 = \frac{\delta \;cos\; \alpha}{sin\; \gamma} \;sin\; (\alpha_1 - \theta)\,, \quad Y_1 = \frac{\delta \;sin\; \alpha}{sin\; \gamma} \;sin\; (\alpha_1 - \theta).$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (6) ein, so ergibt sich nach einigen Reductionen:

$$a(x \sin\alpha - y\cos\alpha)\sin\gamma = \delta\,(x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 - a\sin\gamma)\sin(\alpha-\theta)$$
$$a_1(x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1)\sin\gamma = \delta(x\sin\alpha - y\cos\alpha - a_1\sin\gamma)\sin(\alpha_1-\theta).$$

Um aus diesen Gleichungen θ zu eliminiren, verfahre man in ähnlicher Weise, wie dies im vorhergehenden Falle geschehen ist und benutze dabei wieder die daselbst angegebene Gleichung (3). Man erhält dann unmittelbar:

$$\begin{aligned}
& a^2\,(x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 - a\sin\gamma)^2\,(x\sin\alpha - y\cos\alpha\,)^2 \\
+ \; & a_1^2\,(x\sin\alpha - y\cos\alpha - a_1\sin\gamma)^2\,(x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1)^2 \\
- \; & 2aa_1\cos\gamma\,(x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 - a\sin\gamma) \\
\times \; & (x\sin\alpha - y\cos\alpha - a_1\sin\gamma)\,(x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1) \\
\times \; & (x\sin\alpha - y\cos\alpha) \\
= \; & \delta^2(x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 - a\sin\gamma)^2\,(x\sin\alpha - y\cos\alpha - a_1\sin\gamma)^2.
\end{aligned}$$

Durch Polar-Coordinaten ausgedrückt, würde sich diese Gleichung beträchtlich vereinfachen, aber gleichwohl in Bezug auf den Radius vector vom vierten Grade sein.

Ohne uns auf eine ausführlichere Untersuchung dieser Curve einzulassen, möge nur der besondere Fall etwas näher erörtert werden, in welchem a und a_1 unendlich gross sind. Dann ist die Gleichung:

$$a_1\sin\alpha_1 = a\sin\alpha \quad \text{oder} \quad a_1 = a\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

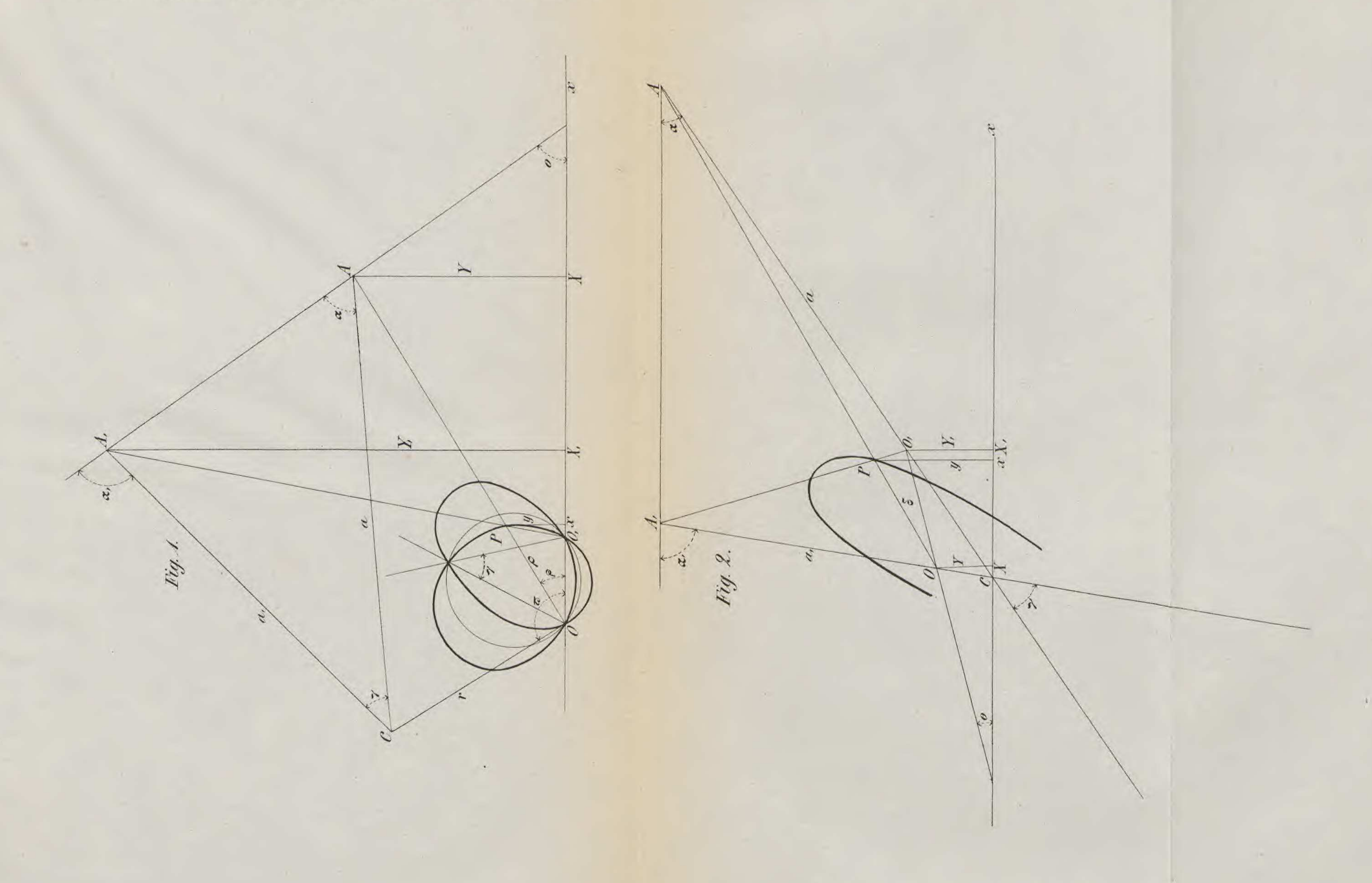
zu berücksichtigen. Man könnte nun die dieser Voraussetzung entsprechende Gleichung der Curve aus der so eben gefundenen erhalten. Rücksichtlich der dabei möglichen Reductionen ist es jedoch kürzer, unmittelbar von den Gleichungen (6) auszugehen und die gedachten Annahmen in dieselben einzuführen. Man findet dann:

$$(X - x)\sin\alpha = (Y - y)\cos\alpha$$
$$(X_1 - x)\sin\alpha_1 = (Y_1 - y)\cos\alpha_1,$$

oder also

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = -\,\delta\sin(\alpha - \theta)$$
$$x\sin\alpha_1 - y\cos\alpha_1 = +\,\delta\sin(\alpha_1 - \theta).$$

Winckler. Ueber das Problem der 4-Punkte bei Anwendung des Messtisches.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Addirt und subtrahirt man diese Gleichungen, so erlangt man:

$$\left(-x\ sin\ \frac{\alpha+\alpha_1}{2} + y\ cos\ \frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right) cotg\ \tfrac{1}{2}\gamma = \delta\ cos\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \theta\right)$$

$$\left(+x\ cos\ \frac{\alpha+\alpha_1}{2} + y\ sin\ \frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right) tang\ \tfrac{1}{2}\gamma = \delta\ sin\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \theta\right).$$

Erhebt man diese beiden Gleichungen ins Quadrat und addirt sie, so wird man nach einigen nahe liegenden Umformungen die folgende finden:

$$x^2\left(sin^2\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\ cos^4\tfrac{1}{2}\gamma + cos^2\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\ sin^4\tfrac{1}{2}\gamma\right)$$
$$+y^2\left(sin^2\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\ sin^4\tfrac{1}{2}\gamma + cos^2\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\ cos^4\tfrac{1}{2}\gamma\right)$$
$$-xy\ sin\,(\alpha+\alpha_1)\ cos\ \gamma = \frac{\delta^2}{4}\ sin^2\ \gamma,$$

welches offenbar die Gleichung einer Ellipse ist.

Wählt man die Richtung der Abscissenaxe dergestalt, dass sie den Winkel γ halbirt, so wird $\alpha_1 = -\alpha$, und man erhält die Gleichung in der sehr einfachen Form:

$$x^2\ sin^4\tfrac{1}{2}\gamma + y^2\ cos^4\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\delta^2}{4}\ sin^2\gamma$$

oder:

$$\frac{x^2}{(\delta\ cot\ \frac{1}{2}\gamma^2)} + \frac{y^2}{(\delta\ tang\ \frac{1}{2}\gamma)^2} = 1.$$

Bezeichnet man die Halbaxen der Ellipse mit a und b, so ist:

$$a = \delta\ cotg\ \tfrac{1}{2}\gamma\,, \qquad b = \delta\ tang\ \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$\delta = \sqrt{ab} \qquad , \qquad tang\ \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Hieraus ergibt sich die meines Wissens neue Eigenschaft der Ellipse, wonach sich durch ihren Mittelpunkt jederzeit zwei zur grossen Axe symmetrische gerade Linien der Art legen lassen, dass wenn man in denselben irgend zwei Punkte annimmt, deren Entfernung der mittleren geometrischen Proportionale der beiden Halbaxen gleich ist, und wenn man durch sie zu jenen beiden Geraden Parallelen zieht, diese sich in einem Punkte der Ellipse schneiden.

Es ist klar, dass man vermöge dieser Eigenschaft, ohne der Kreisschnitte zu bedürfen, die Ellipse blos vermittelst gerader Linien construiren könne.